दत्तांशानां प्रबन्धनम्

अध्यायः 3

3.1 भूमिका

गतकक्ष्यासु भवन्तः विभिन्नप्रकारकाणां दत्तांशैः सह कार्यं कृतवन्तः । भवन्तः दत्तांशानाम् एकत्रीकरणं तेषां तालिकाबद्धनं तथा च तेषां दण्डालेखरूपेण निरूपणम् इति विषयान् अधिगतवन्तः । दत्तांशानां संग्रहः अभिलेखनं प्रस्तुतीकरणं च अस्माकम् अनुभवानाम् एकत्रीकरणे तेभ्यः च निष्कर्ष-निस्सारणे साहाय्यं कुर्वन्ति । अस्मिन् अध्याये वयम् इमां दिशं प्रति एकं सोपानम् इतोऽपि अग्रे वर्धिष्यामहे । भवतां पुरतः केचन अन्यप्रकारकाणां दत्तांशाः आलेखाः च आगमिष्यन्ति । भवन्तः समाचारपत्रैः, पत्रिकाभिः, दूरदर्शनेन अन्यविधसाधनैः च विभिन्नप्रकारकाणान् दत्तांशान् दृष्टवन्तः सन्ति । भवन्तः एतदपि जानन्ति यत् सर्वे दत्तांशाः अस्मभ्यः सूचनाम् अवश्यमेव ददति । आयान्तु दत्तांशानां कानिचित् सामान्यरूपाणि पश्यामः यानि रूपाणि भवतां पुरतः आयान्ति एव । अङ्कानाम् एते सङ्ग्रहाः किं बोधयन्ति ?

तालिका 3.1

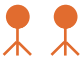
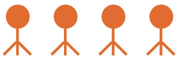
20.6.2006 तमे दिने नगराणां तापमानम्		
	अधिकतमम्	न्यूनतमम्
अहमदाबादः	38°C	29°C
अमृतसरः	37°C	26°C
बेङ्गलूरः	28°C	21°C
चेन्नई	36°C	27°C
देहली	38°C	28°C
जयपुरम्	39°C	29°C
जम्मूः	41°C	26°C
मुम्बयी	32°C	27°C

तालिका 3.2

पादकन्दुकस्य विश्व-चषकः प्रतियोगिता 2006	
यूक्रेणेन सऊदी-अरबः पराजितः	4-0 तः
स्पेनेन ट्यूनिशिया पराजितः	3-1 तः
स्विटजरलैण्डदेशेन टोगोदेशः पराजितः	2-0 तः

हिन्द्याः एकस्यां कक्षापरिक्षायां 5 विद्यार्थिभिः दशसु प्राप्ताः दत्तांशाः 4,5,8,6,7 इति सन्ति ।

तालिका 3.3

एकस्यां कक्ष्यायां साप्ताहिकानुपस्थित्याः प्रद्रष्टारः दत्तांशाः	
सोमवासरः	
मङ्गलवासरः	
बुधवासरः	-
बृहस्पतिवासरः	
शुक्रवासरः	
शनिवासरः	
	इति एकं छात्रं निरूपयति

उदाहरणार्थं भवन्तः एतत् वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 20.06.2006 तमे दिने जम्मोः अधिकतमं तापमानं सर्वाधिकम् आसीत् (तालिका 3.1) अथवा वयं वक्तुं शक्नुमः यत् बुधवासरे कश्चन अपि छात्रः अनुपस्थितः नासीत् (तालिका3.2)। किम् वयम् एतान् अह्कान् केनचित् अन्यविधिना सङ्घटयितुं प्रस्तोतुं च शक्नुमः येन तेषां विश्लेषणं व्याख्या च इतोऽपि सम्यक् भवेत् ? अस्मिन् अध्याये वयम् एतादृशानां प्रश्नानां उत्तराणि प्राप्तुं प्रयतिष्यामहे।

3.2 दत्तांशानां सङ्ग्रहः

नगर-तापमानानां विषये दत्तांशाः (तालिका 3.1) अस्मान् अनेकानि तथ्यानि बोधयितुं शक्नुवन्ति परञ्च एते दत्तांशाः अस्मान् एतत् वक्तुं न शक्नुवन्ति यत् सम्पूर्णे वर्षे कस्य नगरस्य अधिकतमं तापमानं सर्वाधिकम् आसीत्। एतत् ज्ञातुम् अस्माभिः एतेषु नगरेषु प्रत्येकं नगरस्य सम्पूर्णवर्षस्य अधिकतमैः तापमानैः सम्बन्धिताः दत्तांशाः संग्राह्याः भविष्यन्ति। अस्यां स्थितौ 3.1 इति तालिकायां प्रदत्तवर्षस्य एक-विशिष्ट-दिनस्य तापमान-तालिका पर्याप्ता नास्ति।

अनेन एतत् प्रदर्शितं यत् प्रायशः दत्तांशानां प्रदत्तसंग्रहः तत्सम्बन्धिनीम् एकां विशिष्टां सूचनां न दद्यात्। एतदर्थम् अस्माकं कृते एतद् आवश्यकम् अस्ति यद् वयं तां विशिष्टसूचनां मनसि निधाय अङ्कानां सङ्ग्रहणं कुर्याम। उपर्युक्तस्थितौ वयं याम् अभीष्ट-सूचनां प्राप्तुम् इच्छामः स्म सा एषा आसीत् यत् अखिलवर्षावधौ एतेषां नगराणाम् अधिकतमानि तापमानानि कानि आसन् यानि वयम् 3.1 इति तालिकातः न प्राप्तुं शक्तवन्तः। अनेन प्रकारेण **अङ्कानाम् एकत्रीकरणात् पूर्वम् अस्माभिः एतत् अवश्यमेव ज्ञातव्यं यत् वयम् एतेषाम् उपयोगं किमर्थं करिष्यामः।**

अधः काश्चन स्थितयः दत्ताः सन्ति।

भवन्तः अध्ययनं कर्तुम् इच्छन्ति -

- गणिते निजकक्ष्यायाः प्रदर्शनस्य
- पादकन्दुके अथवा क्रिकेटमध्ये भारतस्य प्रदर्शनस्य
- कस्मिंश्चित् क्षेत्रे महिलासाक्षरता-मानस्य अथवा
- भवतां निकटस्थेषु परिवारेषु पञ्च-वर्षेभ्यः न्यूनवयसां शिशूनां संख्यायाः।

उपर्युक्त-स्थितिषु भवतां कृते कीदृशां दत्तांशानाम् आवश्यकता अस्ति ? यावद् भवन्तः उपयुक्तान् दत्तांशान् न संग्रहिष्यन्ति तावत् पर्यन्तं भवन्तः अभीष्टज्ञानं प्राप्तुं न शक्नुवन्ति। एकैकस्य कृते उपयुक्ताः दत्तांशाः के सन्ति ? निजमित्रैः सह चर्चयन्तु अवचिन्वन्तु च यत् प्रत्येकं स्थित्यां केषां दत्तांशानाम् आवश्यकता भविष्यति ? केषाम् अङ्कानां सङ्ग्रहः सरलः भवति केषां च सङ्ग्रहः कठिनः भवति।

3.3 दत्तांशानां सङ्घटनम्

यदा वयम् अङ्कानां सङ्ग्रहणं कुर्मः तदा अस्माभिः ते दत्तांशाः अभिलिख्य संघटनीयाः भवन्ति। अस्य का आवश्यकता अस्ति ?

अधोदत्तम् उदाहरणं विचारयन्तु -

कक्ष्या-अध्यापिका सुश्रीनीलमः एतत् ज्ञातुम् इच्छति स्म यत् आङ्ग्ले छात्राणां प्रदर्शनं कीदृशम् आसीत्? सा विद्यार्थिभिः लब्धान् अङ्कान् निम्नलिखितप्रकारेण लिखति -

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

एतस्मिन् रूपे दत्तांशाः सरलतया अधिगन्तुं योग्याः न आसन्। सा एतदपि न ज्ञातवती यत् विद्यार्थिनां विषये तस्याः अवधारणाः तेषां प्रदर्शनेन सह साम्यं भजते अथवा न । नीलमस्य एकः सहकर्मी तेषाम् निम्नलिखितरूपेण एकत्रीकरणे तस्याः साहाय्यं करोति। (तालिका 3.4)

तालिका 3.4

अनु-क्रमाङ्कः	नाम	पञ्चाशत्-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताङ्काः	अनु-क्रमाङ्कः	नाम	पञ्चाशत्-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताङ्काः
1	अजयः	23	6	गोविन्दः	46
2	अरमानः	35	7	जयः	13
3	आशीषः	48	8	कविता	27
4	दीप्तिः	30	9	मनीषा	32
5	फैजानः	25	10	नीरजः	38

अनेन प्रकारेण नीलमः एतत् अवगतवती यत् कः छात्रः कति अङ्कान् प्राप्तवान् ? किन्तु सा किमपि इतोऽपि अधिकं ज्ञातुम् इच्छति स्म। दीपिका तान् दत्तांशान् द्वितीयप्रकारेण प्रदर्शितवती।

तालिका 3.5

अनुक्रमाङ्कः	नाम	पञ्चाशत्-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताङ्काः	अनुक्रमाङ्कः	नाम	पञ्चाशत्-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताङ्काः
3	आशीषः	48	4	दीप्तिः	30
6	गोविन्दः	46	8	कविता	27
10	नीरजः	38	5	फैजानः	25
2	अरमानः	35	1	अजयः	23
9	मनीषा	32	7	जयः	13

अधुना नीलमः एतदवगमने समर्था अभवत् यत् कः सर्वेभ्यः श्रेष्ठप्रदर्शनं कृतवान् कस्य च कृते सहायतायाः आवश्यकता अस्ति।

अस्माकं पुरतः आगम्यमाणाः दत्तांशाः तालिकाबद्धरूपेण भवन्ति। अस्माकं विद्यालये पञ्जिकाः, प्रगति - प्रतिवेदनम्, अभ्यास–पुस्तिकासु क्रमानुसारणीसूची, तापमान-अभिलेखाः तथा च अन्ये अनेकदत्तांशाः

प्रयासं कुर्वन्तु

स्वकक्ष्यायाः न्यूनातिन्यूनं विंशतिं छात्रान् (बालकान् बालिकाः च) पृथक्-पृथक् तोलयन्तु (किलोग्राममात्रायाम्)। प्राप्तान् दत्तांशान् संगृह्य निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तराणि दातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु:

(i) सर्वाधिकः भारः कस्य अस्ति ?

(ii) कः भारः अधिकांशतः छात्राणाम् अस्ति ?

(iii) भवतः, भवतः च सर्वप्रियमित्रस्य भारयोः किम् अन्तरं वर्तते ?

सारणीबद्धरूपेण भवन्ति । किं भवन्तः केषाञ्चित् अङ्कानां विषये विचारयितुं शक्नुवन्ति ये सारणीबद्धरूपेण सन्ति।

यदा वयं दत्तांशान् एकस्याम् उपयुक्त-तालिकायां स्थापयामः तदा तेषाम् अवगनं व्याख्या च सरलीभवति।

3.4 प्रतिनिधिमानम्

भवताम् 'औसत' इति शब्देन अवश्यमेव परिचयः स्यात् तथा च दैनिकजीवने औसतशब्देन सम्बन्धितानि निम्नलिखितप्रकारकाणि कथनानि भवद्भिः अवश्यमेव श्रूतानि पठितानि च स्युः

- ईशा स्वीये अध्ययने प्रतिदिनं मध्यमानेन (औसतन) प्रायशः पञ्चघण्टात्मकं कालं व्ययीकरोति।
- अस्मिन् समये वर्षस्य मध्यमानं तापमानं चत्वारिंशद्-डिग्रीसेल्सियसपरिमितं वर्तते।
- मम कक्ष्यायाः विद्यार्थिनां मध्यमानम् आयुः द्वादशवर्षात्मकम् अस्ति।
- एकस्य विद्यालयस्य वार्षिक-परीक्षायाः समये विद्यार्थिनां मध्यमाना उपस्थितिः नवति-प्रतिशतम् आसीत्।

एवं प्रकारकाणि बहूनि कथनानि भवितुम् अर्हन्ति। उपरि दत्तानां कथनानां विषये विचारयन्तु।

किं भवन्तः विचारयन्ति यत् प्रथमे कथने उक्तः बालः प्रतिदिनं निश्चयेन पञ्च-होराः यावत् पठति ? अथवा किं तस्मिन् विशेषसमये प्रदत्तस्थानस्य तापमानं सदैव चत्वारिंशद्-डिग्रीसेल्सियसपरिमितम् एव तिष्ठति ? अथवा किं तस्यां कक्षायां प्रत्येकं विद्यार्थिनः आयुः द्वादशवर्षात्मकम् अस्ति ? स्पष्टतः एतेषां प्रश्ननाम् उत्तरं नकारात्मकम् अस्ति।

तदानीम् इमानि कथनानि अस्मान् किं बोधयन्ति ?

मध्यमानेन वयम् अधिगच्छामः यत् ईशा प्रायः एकस्मिन् दिने पञ्चहोराः यावत् पठति। कतिचित् दिनानि सा आभ्यः होराभ्यः न्यूनं पठति कतिचित् च दिनानि सा आभ्यः होराभ्यः अधिकं पठति।

तद्वदेव चत्वारिंशद्-डिग्रीसेल्सियस्-परिमितमस्य मध्यमान-तापमानस्य अर्थः अस्ति यत् वर्षस्य अस्मिन् समये तापमानं प्रायः 40°C इति भवति। कदाचित् तत् 40°C इत्यस्मात् न्यूनं कदाचित् च 40°C अस्मात् अधिकं भवति।

इत्थं वयम् एतद् अनुभवामः यद् मध्यमानम् एका एतादृशी संख्या विद्यते या प्रेक्षणानाम् अथवा दत्तांशानाम् एकस्य समूहस्य केन्द्रीयप्रवृत्तिं निरूपयति (अथवा दर्शयति)। यतोहि मध्यमानं सर्वेभ्यः न्यूनाधिकमूल्यस्य दत्तांशेषु भवति। अतः वयं कथयामः यत् मध्यमानं दत्तांशानाम् एकसमूहस्य केन्द्रीयप्रवृत्तेः मापकम् अस्ति।

विभिन्नप्रकारकाणां दत्तांशानां व्याख्यां कर्तुं विभिन्नप्रकारकाणां प्रतिनिधिमानानाम् अथवा केन्द्रीयमानानाम् आवश्यकता भवति। एतेषु एकं प्रतिनिधिमानम् अङ्कगणितीयमाध्यम् अथवा समान्तरमाध्यम् अस्ति।

3.5 अङ्कगणितीय-माध्यः

दत्तांशानाम् एकसमूहार्थम् अधिकांशतः प्रयुज्जमानं प्रतिनिधिमानम् अङ्कगणितीयमाध्यः अस्ति, संक्षेपेण एषः माध्यः mean इति कथ्यते। एतं संयक् अवगन्तुम् आगच्छन्तु निम्नलिखितम् उदाहरणं पश्यामः

द्वयोः पात्रयोः क्रमशः विंशति-लीटरमितं षष्टि-लीटरमितं च दुग्धं विद्यते। यदि उभयोः पात्रयोः समान-मात्रायां दुग्धं स्थापयामः तर्हि प्रत्येकं पात्रे कियत् दुग्धं भविष्यति ? यदा वयम् एतादृशं प्रश्नं पृच्छामः तदा वयम् अङ्कगणितीयं मध्यमाङ्कं ज्ञातुं कथयामः।

उपर्युक्त-स्थितौ मध्यमानम् अथवा अइकगणितीय-मध्याङ्कः भविष्यति :

$$\frac{\text{दुग्धस्यनिखिलमात्रा}}{\text{पात्राणांसङ्ख्या}} = \frac{20+60}{2} \text{ लीटर्} = 40 \text{ लीटर्}$$

अनेन प्रकारेण प्रत्येकं पात्रे चत्वारिंशल्लीटरमितं दुग्धं भविष्यति।

मध्यमानम् अथवा अङ्कगणितीयमाध्यः अथवा केवलमात्रं माध्यः निम्नलिखितरूपेण परिभाष्यते

$$\text{माध्यः} = \frac{\text{समेषां प्रेक्षणानां योगः}}{\text{प्रेक्षणानां सङ्ख्या}}$$

निम्नलिखितेषु उदाहरणेषु विचारं कुर्वन्तु :

उदाहरणम् 1 आशीषः क्रमागतेषु त्रिषु दिवसेषु क्रमशः 4 घण्टाः, 5 घण्टाः तथा च 3 घण्टाः यावत् पठति। तस्य प्रतिदिनम् अध्ययनस्य मध्यमानः समयः कः अस्ति ?

समाधानम् आशीषस्य अध्ययनस्य मध्यमानम् (औसत) समयः कः भविष्यति ?

$$\frac{\text{अध्ययने नियोजितः समयः}}{\text{दिनानां सङ्ख्यायेषु अध्ययनम् अभवत्}} = \frac{4+5+3}{3} \text{ घण्टाः} = 4 \text{ घण्टाः प्रतिदिनम्}$$

अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः यत् आशीषः प्रतिदिनं मध्यमानेन 4 घण्टाः यावत् पठति।

उदाहरणम् 2 एकः क्रीडकः 6 पर्यायेषु (innings) निम्नलिखितान् धावनाङ्कान् अर्जितवान्
36, 35, 50, 46, 60, 55
एकस्मिन् क्रमे तेन अर्जितानां धावनाङ्कानां माध्यः ज्ञायताम्

समाधानम् आहत्य धावनाङ्काः 36+35+50+46+60+55 = 282

माध्यं ज्ञातुं वयं सर्वेषां प्रेक्षणानां योगं कृत्वा तं योगं प्रेक्षणानां सकल-संख्यया विभक्तीकुर्मः। अतः अस्यां स्थितौ

$$\text{माध्यः} = \frac{282}{6} = 47$$

अनेन प्रकारेण एकस्मिन्क्रमे तेन अर्जितानां धावनाङ्कानां माध्यः सप्तचत्वारिंशद् (47) इति अस्ति।

अंकगणितीय-माध्यः कुत्र स्थितः वर्तते ?

प्रयासं कुर्वन्तु

भवन्तः अध्ययने व्यतीत-निजसमयस्य (होरासु) सम्पूर्णसप्ताहस्य मध्यमानं कथं ज्ञास्यन्ति ?

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

उपर्युक्तोदाहरणेषु प्रदत्तदत्तांशेषु विचारं कुर्वन्तु तथा च निम्नलिखितविषये चिन्तयन्तु :

- किं माध्यः प्रत्येकं प्रेक्षणात् बृहत् अस्ति ?
- किं माध्यः प्रत्येकं प्रेक्षणात् लघु अस्ति ?

निजमित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु। एतादृशम् एकम् अन्यत् उदाहरणं चिन्तयन्तु एतेषां च प्रश्नानाम् उत्तराणि ददतु।

भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् माध्यं बृहत्तम-लघुतम-प्रेक्षणानां मध्ये स्थितं भवति। विशिष्टरूपेण द्वयोः संख्ययोः माध्यं सदैव तयोः मध्ये स्थितं भवति।

उदाहरणार्थं पञ्चैकादशयोः (5, 11) माध्यम् = अष्टौ (8) इति अस्ति यत् पञ्चैकादशयोः मध्ये स्थितम् अस्ति।

किं भवन्तः अस्याः अवधारणायाः प्रयोगं कृत्वा एतत् दर्शयितुं शक्नुवन्ति यत् द्वयोः भिन्नात्मक-संख्ययोः यावतीः भिन्नात्मकसंख्याः इच्छामः तावत्यः ज्ञातुं शक्नुवन्ति। उदाहरणार्थम् $\frac{1}{2}$ तथा च $\frac{1}{4}$ मध्ये भवतां कृते एतासां भिन्नात्मकसंख्यानाम् $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{3}{8}$ मध्यमानं मेलिष्यति = पुनश्च $\frac{1}{2}$ तथा च $\frac{3}{8}$ एतन्मध्ये आसां मध्यमानम् $\frac{7}{16}$ इति भविष्यति।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. एकस्य सप्ताहस्य निजनिद्रायां व्यतीतसमयस्य (होरासु) माध्यं ज्ञायताम्

2. $\frac{1}{2}$ तथा च $\frac{1}{3}$ एतन्मध्ये न्यूनातिन्यूनं पञ्च संख्याः ज्ञायन्ताम्।

3.5.1 प्रसारः अथवा परिसरः

बृहत्तम-लघुतमयोः प्रेक्षणयोः भेदेन वयं प्रेक्षणानां प्रसारस्य विषये एकाम् ऊहां कर्तुं शक्नुमः । अयं दीर्घतमप्रेक्षणात् ह्रस्वतमप्रेक्षणं व्यवकलय्य ज्ञातुं शक्यते। वयम् एतं परिणामम् अङ्कानां प्रसारः अथवा परिसरः इति कथयामः।

अधोलिखितम् उदाहरणं पश्यन्तु :

उदाहरणम् 3 एकस्य विद्यालयस्य दशानाम् अध्यापकानाम् आयुः वर्षेषु एवम् अस्ति :

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) सर्वाधिकवयोमितस्य अध्यापकस्य आयुः किम् अस्ति ? तथा च सर्वन्यूनवयोमितस्य किम् अस्ति ?

(ii) अध्यापकानां वयसः परिसरः कः अस्ति ?

(iii) एतेषाम् अध्यापकानां माध्यायुः किम् अस्ति ?

समाधानम्

(i) आयुः आरोहिक्रमे व्यवस्थाप्य वयं प्राप्नुमः

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

अस्माभिः ज्ञायते यत् सर्वाधिकवयोमितस्य अध्यापकस्य आयुः पञ्चचत्वारिंशद् वर्षात्मकम् अस्ति तथा च सर्वन्यूनवयोमितस्य अध्यापकस्य आयुः त्रयोविंशतिः वर्षात्मकम् अस्ति।

(ii) अध्यापकानाम् आयुषः परिसरः = (54-23) वर्षाणि = एकत्रिंशद् (31) वर्षात्मकः अस्ति।

(iii) अध्यापकानाम् माध्यायुः

$\frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10}$ = वर्षाणि

$=\frac{350}{10}$ वर्षाणि = 35 वर्षाणि।

प्रश्नावली 3.1

1. निजकक्ष्यायाः केषाञ्चिद् दश-विद्यार्थिनाम् औन्नत्यस्य परिसरः ज्ञायताम्।
2. कक्ष्यायाः एकस्मिन् मूल्याङ्कने लब्धान् निम्नलिखित-अङ्कान् एकस्मिन् सारणीबद्धरूपेण एकत्रीकुर्वन्तु

   4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

   (i) बृहत्तमः अङ्कः कः अस्ति ? (ii) लघुतमः अङ्कः कः अस्ति ?
   (iii) एतेषाम् अङ्कानां परिसरः कः ? (iv) अङ्कगणितीयं माध्यं ज्ञायताम् ?
3. पञ्चनां प्रथम-पूर्णसंख्यानां माध्यं ज्ञायताम्।
4. एकः क्रिकेटक्रीडकः अष्ट-पर्यायेषु (क्रमेषु) निम्नलिखितान् धावनाङ्कान् अर्जितवान्

   58, 76, 40, 35, 46, 50, 0, 100.

   तस्य माध्यप्राप्ताङ्काः (score) ज्ञायन्ताम्।
5. निम्नलिखिता तालिका प्रत्येकं क्रीडकद्वारा चतसृषु क्रीडाप्रतियोगितासु अर्जितान् अङ्कान् दर्शयति।

क्रीडकः	क्रीडा 1	क्रीडा 2	क्रीडा 3	क्रीडा 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	न अक्रीडत्	13

अधुना प्रश्नानाम् उत्तराणि ददतु :

(i) प्रत्येकं क्रीडायां A द्वारा मध्यमानेन अर्जितान् अङ्कान् ज्ञातुं माध्यं ज्ञायताम्।

(ii) प्रत्येकं क्रीडायां C द्वारा अर्जितं माध्याङ्कं ज्ञातुं भवन्तः निखिलाङ्कान् त्रिभिः (3) अथवा चतुर्भिः (4) विभाजयन्ति वा ? किमर्थम् ?

(iii) B सर्वासु क्रीडास्पर्धासु भागं गृह्णाति। भवन्तः तस्य अङ्कानां माध्यं कथं ज्ञास्यन्ति ?

(iv) कस्य क्रीडकस्य प्रदर्शनं सर्वश्रेष्ठम् अस्ति ?

6. विज्ञानस्य एकस्यां परीक्षायां विद्यार्थिनाम् एकसमूहद्वारा शतात् प्राप्ताङ्काः 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 तथा च 75 सन्ति। ज्ञायताम् -

   (i) विद्यार्थिभिः प्राप्तः अधिकतमः अङ्कः न्यूनतमः च अङ्कः

   (ii) प्राप्तानाम् अङ्कानां परिसरः

   (iii) समूहेन प्राप्तः माध्याङ्कः
7. षट्सु क्रमागतवर्षेषु एकस्मिन् विद्यालये विद्यार्थिनां संख्या निम्नलिखिता आसीत् :

   1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820

अस्मिन् समयावधौ विद्यालयस्य विद्यार्थिनां माध्यसङ्ख्या ज्ञायताम्।

8. कस्मिंश्चित् नगरे कस्मिंश्चित् विशेषसप्ताहे सप्तदिनेषु जातवृष्टिः (mm मध्ये) निम्नलिखितरूपेण अभिलिखिता

दिनम्	सोमवासरः	मङ्गलवासरः	बुधवासरः	बृहस्पतिवासरः	शुक्रवासरः	शनिवासरः	रविवासरः
वृष्टिः (mm)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

(i) उपर्युक्तेभ्यः अङ्केभ्यः वृष्टेः परिसरः ज्ञायताम्।

(ii) अस्य सप्ताहस्य माध्यवृष्टिः ज्ञायताम्।

(iii) कति दिनेषु वृष्टिः माध्यवर्षातः न्यूना आसीत् ?

9. 10 बालिकानाम् औन्नत्यानि से.मी. (cm) मध्ये मापितानि, निम्नलिखिताः च परिणामाः प्राप्ताः 135,150,139,128,151,132,146,149,143,141.

(i) उन्नततमायाः बालिकायाः औन्नत्यं किम् अस्ति ?

(ii) वामनतमायाः बालिकायाः औन्नत्यं किम् अस्ति ?

(iii) एतेषाम् अङ्कानां परिसरः कः अस्ति ?

(iv) बालिकानां माध्य-औन्नत्यम् (दीर्घता) किम् अस्ति ?

(v) कति बालिकानां दीर्घता माध्यदीर्घतातः अधिका अस्ति ?

3.6 बहुलकः

यथा अस्माभिः पूर्वं सूचितं यत् केवलं माध्यः एव केन्द्रीयप्रवृत्तेः मापः अथवा प्रतिनिधि-मानं नास्ति। विभिन्नाः आवश्यकताः अनुसृत्य अन्यविध-केन्द्रीयप्रवृतेः मापकानां प्रयोगः क्रियते।

निम्नलिखितानि उदाहरणानि पश्यन्तु

युतकानां विभिन्नमापनानां साप्ताहिकीं याचनां परिज्ञातुम् एकः आपणिकः नवति-पञ्चनवति-शत-पञ्चाधिकशत-दशाधिकशत-सेण्टीमीटर्-मितमापयुतानां (90 सेण्टीमीटर्,95 से.मी., 100 से.मी., 105से. मी. 110 से.मी.) युतकानां विक्रयणस्य अभिलेखं स्थापयति। एकस्य सप्ताहस्य अभिलेखः एवम् अस्ति -

परिमापः (से.मी.मध्ये)	90	95	100	105	110	योगः
विक्रीतानां युतकानां संख्या	8	22	32	37	6	105

यदि सः विक्रीतानां युतकानां संख्यायाः माध्यं ज्ञातुं प्रयतते तर्हि किं भवन्तः विचारयन्ति यत् सः एतं निर्णयं स्वीकर्तुं शक्ष्यति यत् कस्य मापस्य युतकाः सञ्चये (stock) स्थापनीयाः ?

$$\text{विक्रीतानां युतकानां माध्यः} = \frac{\text{विक्रीतानां युतकानाम् अखिलसङ्ख्या}}{\text{विभिन्न-परिणामानां युतकानां सङ्ख्या}} = \frac{105}{5} = 21$$

किं सः प्रत्येकं परिमाणस्य एकविंशतिं युतकानि सञ्चये (stock) स्थापयेत् ? यदि सः एवं करोति तर्हि किं सः स्वकीयग्रहाकणाम् आवश्यकतां पूरयिष्यति ?

उपर्युक्तम् अभिलेखं दृष्ट्वा आपणिकः पञ्चनवति-शत-पञ्चाधिकशतसेण्टीमीटर्-मितमापयुतानि युतकानि याचयितुं निर्णयति। सः अन्य-परिमाण-युतकानां याचनानिर्णयं तेषां ग्राहकाणां न्यूनसंख्यां दृष्ट्वा किञ्चित्-कालाय स्थगयति।

एकम् अन्यत् उदाहरणं पश्यन्तु

निर्मित-वस्त्राणाम् एकः आपणिकः वदति यत् ‘‘मया सर्वाधिकमापयुक्तानां विक्रीतानां युतकानां परिमापः नवति-सेण्टीमीटर्-परिमितम् अस्ति। अवधानं यच्छन्तु अत्रापि आपणिकस्य रूचिः विभिन्नपरिमाणानां विक्रीत-युतक-संख्यासु एव अस्ति । सः युतकस्य तं मापं पश्यन् अस्ति यस्य सर्वाधिकं विक्रयणं भवति। एतत् दत्तांशानां एकम् अन्यं प्रतिनिधिमानम् अस्ति । सर्वाधिक-विक्रयणं पञ्चाधिकैकशतसेण्टीमीटर्-परिमितमापस्य युतकानां वर्तते। एतत्पञ्चोत्तर-एकशतम् (105) प्रतिनिधिमानं दत्तांशानां **बहुलकः** इति कथ्यते।

दत्तानां प्रेक्षणानाम् एकस्मिन् समूहे सर्वाधिकवारम् आगम्यमानं प्रेक्षणम् अस्य समूहस्य बहुलकः कथ्यते।

उदाहरणम् 4 निम्नलिखितानां संख्यानां बहुलकः ज्ञायताम् ....

1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

समाधानम् समानमानयुताः संख्याः युगपद् व्यवस्थाप्य वयं प्राप्नुमः

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

एतेषां दत्तांशानां बहुलकः द्वे (2) अस्ति यतः एतद् अन्य-प्रेक्षणानाम् अपेक्षया अधिकवारम् आगच्छति।

प्रयासं कुर्वन्तु

निम्नलिखितानां बहुलकः ज्ञायताम्

(i) 2,6,5,3,0,3,4,3,2,4,5,2,4

(ii)2,14,16,12,14,14,16,14,10,14,18,14

3.6.1 बृहत्-दत्तांशानां बहुलकः

यदि प्रेक्षणानां संख्या दीर्घा भवेत् तर्हि तासां समानमानीय-प्रेक्षणानां रूपेण व्यवस्थीकरणं पुनश्च तासां गणनं सरलं न भवति। एतादृशीषु स्थितिषु वयम् अङ्कान् सूचीबद्धान् कुर्मः यथा भवन्तः गतकक्ष्यायां कृतवन्तः सन्ति। अङ्कानां सूचीनिर्माणस्य कार्यं मेलनचिह्नेभ्यः आरम्भं कुर्वन्तः प्रेक्षणानाम् आवृत्तिम् निर्माय पूर्णं कर्तुं शक्नुमः।

इमानि उदाहरणानि पश्यन्तु -

उदाहरणम् 5 दलानाम् एकस्मिन् समूहे क्रीडितेषु पादकन्दुकप्रतियोगिताद्वन्द्वेषु विजयान्तराणि पर्यायेषु निम्नलिखितानि सन्ति -

1,3,2,5,1,4,6,2,5,2,2,2,4,1,2,3,1,1,2,3,2,6,4,3,2,1,
1,4,2,1,5,3,3,2,3,2,4,2,1,2

एतेषाम् अङ्कानां बहुलकः ज्ञायताम्।

समाधानम् आगच्छन्तु एतान् अङ्कान् सूचीबद्धरूपेण स्थापयामः

विजयात् परम्	मेलनचिह्नम्	प्रतियोगितानां संख्या
1	~~||||~~ ||||	9
2	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14
3	~~||||~~ ||	7
4	~~||||~~	5
5					3

6	ll	2
	योगः	40

एतां तालिकां दृष्ट्वा वयं सद्यः एव एतद् वक्तुं शक्नुमः यद्द्वौ (2) इति बहुलकःअस्ति यतोहि द्वि बहु वारं आगतम् अस्ति। अनेन प्रकारेण अधिकांशातः प्रतियोगिताः **2 (गोलों) अन्तरेण द्वयेन जीताः** सन्ति।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

किं संख्यानाम् एकस्मिन् समूहे द्वौ बहुलकौ भवितुम् अर्हतः।

उदाहरणम् 6 निम्नलिखितानां सङ्ख्यानां बहुलकः ज्ञायताम् :
2,2,2,3,3,4,5,5,5,6,6,8

समाधानम् अत्र द्वे (2) तथा च पञ्च (5) उभे अपि त्रिवारम् आगते स्तः। अतः उभे अपि अङ्कानां बहुलके स्तः

कुर्वन्तु

1. स्वीय-कक्ष्यायाः सहपाठिनाम् आयुः वर्षेषु अभिलिखतु पुनः च तेषां बहुलकः ज्ञायताम्।
2. स्वीय-कक्ष्यायाः सहपाठिनां दीर्घतां सेण्टीमीटर्-परिमाणे अभिलिखतु तेषां च बहुलकं ज्ञायताम्।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. निम्नलिखितानाम् अङ्कानां बहुलकः ज्ञायताम् -
   12,14,12,16,15,13,14,18,19,12,14,15,16,15,16,16,15,17,13,16,16,15,
   15,13,15,17,15,14, 15,13,15,14
2. 25 बालानाम् औन्नत्यं सेण्टीमीटर्-परिमाणे अधः प्रदत्तम् अस्ति -
   168,165,163,160,163,161,162,164,163,162,164,163,160,163,160,165,163,162,163,164,163,160,
   165,163,162
   तेषां दीर्घतायाः बहुलकः कः अस्ति ? अत्र वयं बहुलकेन किम् अवगच्छामः?

यत्र माध्यः अस्माकं कृते अङ्कानां सर्वप्रेक्षणानां मध्यमानं प्रददाति तत्र बहुलकः दत्तांशेषु सर्वाधिकवारं आगम्यमानं प्रेक्षणं दर्शयति।

आयान्तु निम्नलिखितेषु उदाहरणेषु विचारं कुर्म -

(a) भवद्भिः एकस्मिन् प्रीतिभोज-कार्यक्रमे आहूतेभ्यः पञ्चविंशत्यै व्यक्तिभ्यः आवश्यकरोटिकानां संख्यायाः विषये निर्णयः स्वीकर्त्तव्यः अस्ति।

(b) एकेन युतक-विक्रेत्रा आपणिकेन स्वीय-संग्रहस्य आपूर्तिः करणीया अस्ति ।

(c) अस्माभिः स्वगृहस्य कृते आवश्यक-द्वारस्य औन्नत्यं ज्ञातव्यम्।

(d) यदि एकस्यां भ्रमणयात्रायां गमनकाले प्रत्येकं व्यक्त्यै केवलम् एकमेव फलं क्रेतव्यं भवेत्तदा अस्मभ्यं कतमत् फलं प्राप्स्यते ?

एतादृशीषु स्थितिषु वयं कस्मिन् बहुलकस्य एकेन उत्तमेन आकलनरूपेण प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः ?

प्रथमे कथने विचारं कुर्वन्तु । कल्पनां कुर्वन्तु यत् प्रत्येकं जनाय आवश्यक-रोटिकानां सङ्ख्या एवम् अस्ति - 2,3,2,3,2,1,2,3,2,2,4,2,2, 3,2,4,4,2,3,2,4,2,4,3,5

एतेषां दत्तांशानां बहुलकः द्वे रोटिके स्तः । यदि वयं बहुलकस्य प्रयोगं अङ्कानां प्रतिनिधिमान-रूपेण कुर्मः । तर्हि अस्मभ्यं प्रत्येकं व्यक्त्यै रोटिकाद्वयमानेन पञ्चविंशत्यै व्यक्तिभ्यः केवलं पञ्चाशद्-रोटिकानाम् आवश्यकता भविष्यति। परन्तु निश्चयेन एताः रोटिकाः सर्वाभ्यः व्यक्तिभ्यः अपर्याप्ताः भविष्यन्ति। अस्यां स्थितौ किं माध्यः एकम् उपयुक्तं प्रतिनिधिमानं भविष्यति ?

तृतीय-कथनाय द्वारस्य औन्नत्यं तासां व्यक्तीनाम् औन्नत्येन सम्बन्धितं वर्तते याः तस्य उपयोगं करिष्यन्ति। चिन्तयन्तु यत् गृहे पञ्च बालकाः चत्वारः च वयस्काः सन्ति, ये तस्य द्वारस्य प्रयोगं कुर्वन्ति पञ्चसु बालकेषु प्रत्येकं बालकस्य औन्नत्यं प्रायशः पञ्चत्रिंशदधिकैकशतसेण्टीमीटर्-परिमितम् अस्ति। औन्नत्यानां बहुलकः पञ्चत्रिंशदधिकैकशतम् (135) अस्ति। किम् अस्माभिः एतादृशं द्वारं क्रेतव्यं यस्य औन्नत्यं 144 सेण्टीमीटरपरिमितम् अस्ति ? किं सर्वेऽपि वयस्काः अस्मात् द्वारात् निर्गन्तुं शक्ष्यन्ति ? एतत् स्पष्टम् अस्ति यद् एतेभ्यः दत्तांशेभ्यः अपि बहुलकः एकम् उपयुक्तं प्रतिनिधिमानं नास्ति। किम् अत्र माध्यम् एकम् उपयुक्तं प्रतिनिधिमानं भविष्यति ?

किमर्थं न ? द्वारस्य औन्नत्य-विषये निर्णयं स्वीकर्तुम् औन्नत्यस्य कस्य प्रतिनिधिमानस्य प्रयोगः क्रियताम् ?

इत्थमेव अवशिष्टकथनानां विषये अपि विश्लेषणं कुर्वन्तु अथ च एतासां स्थितीनां कृते उपयुक्तं प्रतिनिधिमानं ज्ञायताम्।

प्रयासं कुर्वन्तु

स्वीयैः मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु

द्वे स्थिती ददतु यत्र प्रतिनिधिमानरूपेण माध्यस्य प्रयोगः उपयुक्तः भविष्यति।

द्वे स्थिती ददतु यत्र प्रतिनिधिमानरूपेण बहुलकस्य प्रयोगः उपयुक्तः भविष्यति।

3.7 माध्यकः

वयं दृष्टवन्तः स्मः यत् कासुचित् स्थितिषु अङ्कगणितीय-माध्यः केन्द्रीयप्रवृत्तेः एकम् उपयुक्तं मापकम् अस्ति कासुचित् च स्थितिषु बहुलकः केन्द्रीयप्रवृत्तेः एकम् उपयुक्तं मापकम् अस्ति। आयान्तु अधुना एकम् अन्यद् उदाहरणं पश्यामः।। सप्तदशविद्यार्थिनाम् एकस्य समूहस्य विषये विचारं कुर्वन्तु येषाम् औन्नत्यम् सेण्टीमीटर्-परिमाणे निम्नलिखितम् अस्ति :

106,110,123,125,117,120,112,115,110,120,115,102,115,115,109,115,101

क्रीडा-अध्यापिका कक्ष्याम् एतादृशयोः द्वयोः समूहयोः विभाजयितुम् इच्छति यत् प्रत्येकं समूहे विद्यार्थिनां संख्या समाना स्यात्तथा च एकस्मिन् समूहे विद्यार्थिनाम् औन्नत्यानि एकस्मात् विशिष्टाद् औन्नत्यात् न्यूनानि स्युः तथा च अपरस्मिन् समूहे विद्यार्थिनाम् औन्नत्यानि तस्माद् विशिष्टाद् औन्नत्याद् अधिकानि स्युः। सा एतत् कथं करिष्यति ?

आयान्तु तस्याः पार्श्वे ये विभिन्नाः विकल्पाः सन्ति तान् पश्यामः -

(i) सा माध्यं ज्ञातुं शक्नोति। माध्यम् एतद् अस्ति :

$$\frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$= \frac{1930}{17} = 113.5$$

अतः अध्यापिका कक्ष्यायाः विद्यार्थिनः यदि एतादृशयोः द्वयोः समूहयोः विभक्तीकरोति ययोः एकस्मिन् समूहे माध्य-औन्नत्याद् अल्पोन्नताः विद्यार्थिनः सन्ति अथ च द्वितीयसमूहे माध्य-औन्नत्याद् अधिकोन्नताः विद्यार्थिनः सन्ति। तदानीम् एतयोः समूहयोः विद्यार्थिनां संख्या समाना न तिष्ठति यतोहि एकस्मिन् समूहे सप्त सदस्याः भविष्यन्ति द्वितीयसमूहे च दश सदस्याः भविष्यन्ति।

(ii) तस्याः पार्श्वे द्वितीयः विकल्पः अस्ति यत् सा बहुलकं जानीयात्। सर्वाधिकानाम् आवृत्तीनां प्रेक्षणम् 115 से.मी. इति अस्ति अयं च बहुलकः भविष्यति।

बहुलकाद् अधः सप्त विद्यार्थिनः सन्ति तथा च दश विद्यार्थिनः बहुलकस्य समानाः अथवा ततः उपरि सन्ति। अतः वयं कक्ष्यायाः विद्यार्थिनः द्वयोः समानसमूहयोः विभाजयितुं न शक्नुमः।

अतः आगच्छन्तु अधुना वयम् एकस्य अन्य-वैकल्पिक-प्रतिनिधिमानस्य अथवा केन्द्रीयप्रवृत्तेः मापकस्य विषये चिन्तयिष्यामः। एतत् कर्तुं वयं पुनः प्रदत्तानि औन्नत्यानि (से.मी.मध्ये) पश्यामः तथा च एतानि औन्नत्यानि आरोहिक्रमे व्यवस्थापयामः। वयं निम्नलिखितं प्रेक्षणं प्राप्नुमः

101,102,106,109,110,110,112,115,115,115,115,115,117,120,120,123,125

एतेषु अङ्केषु मध्यमानम् (middle-value) पञ्चदशाधिकैकशतम् (115) अस्ति,यतोहि एतद् विद्यार्थिनः द्वयोः समानयोः समूहयोः विभाजयति यस्मिन् प्रत्येकं समूहे अष्टौ विद्यार्थिनः सन्ति। एतत् मानम् अङ्कानां माध्यकः (median) इति कथ्यते। माध्यकः तन्मानं बोधयति यद् अङ्कानां मध्ये स्थितं भवति (तान् आरोहिक्रमे अथवा अवरोहिक्रमे व्यवस्थाप्य) तथा च अर्ध-प्रेक्षणानि अस्माद् अधिकमानयुतानि भवन्ति अर्ध-प्रेक्षणानि च अस्मात् न्यूनमानयुतानि भवन्ति। क्रीडाध्यापिका एतं मध्यस्थं विद्यार्थिनम् अस्याः क्रीडायाः निर्णायकं घोषयितुं शक्नोति। अत्र वयं केवलं ताः एव स्थितीः स्वीकरिष्यामः यत्र प्रेक्षणानां संख्या विषमा अस्ति।

इत्थं प्रदत्तान् दत्तांशान् आरोहिक्रमे अथवा अवरोहिक्रमे व्यवस्थीकृत्य तेषां मध्यस्थं मानं माध्यकः इति कथ्यते।

प्रयासं कुर्वन्तु

भवताम् एकेन मित्रेण प्रदत्तानाम् अङ्कानां माध्यकं बहुलकं च ज्ञातम्। मित्रेण कृता त्रुटिः यदि काचित् भवेत् तदा वदन्तु शुद्धं च कुर्वन्तु -

35,32,35,42,38,32,34

माध्यकः = 42, बहुलकः = 32

अवधानं यच्छन्तु यत् सामान्यतः वयं माध्यकार्थं बहुलकार्थं च एकमेव मानं नैव प्राप्स्यामः। आयान्तु कानिचिद् उदाहरणानि पश्यामः

उदाहरणम् 7 निम्नलिखितानां दत्तांशानां माध्यकः ज्ञायताम् -

24,36,46,17,18,25,35

समाधानम् दत्तांशान् आरोहिक्रमे व्यवस्थीकृत्य वयं प्राप्नुमः

17,18,24,25,35,36,46

मध्यस्थं प्रेक्षणं माध्यकः इति भवति। अतः माध्यकः पञ्चविंशतिः (25) अस्ति।

प्रश्नावली 3.2

1. गणितस्य एकस्यां परीक्षायां पञ्चदशभिः विद्यार्थिभिः पञ्चविंशति-पूर्णाङ्केषु प्राप्ताः अङ्काः निम्नलिखिताः सन्ति :

   19,25,23,20,9,20,15,10,5,16,25,20,24,12,20

   एतेषाम् दत्तांशानां बहुलकः माध्यकः च ज्ञायेताम्। किम् एतौ समानौ स्तः ?
2. एकस्यां क्रिकेटस्पर्धायां क्रीडकैः अर्जिताः धावनाङ्काः एवं सन्ति -

   6,15,120,50,100,80,10,15,8,10,15

   एतेषां माध्यः, बहुलकः माध्यकः च ज्ञायन्ताम्।। किम् एतत्त्रयं समानम् अस्ति ?
3. एकस्याः कक्ष्यायाः पञ्चदश-विद्यार्थिनां भारः (कि.ग्रा. मध्ये) एवम् अस्ति -

   38,42,35,37,45,50,32,43,43,40,36,38,43,38,47

   (i) एतेषाम् दत्तांशानां बहुलकः माध्यकः च ज्ञायताम्।

   (ii) किम् एतेषाम् एकाधिकाः बहुलकाः सन्ति ?
4. निम्नलिखितानां दत्तांशानां बहुलकः माध्यकः च ज्ञायताम् ---

   13,16,12,14,19,12,14,13,14
5. उच्यतां यत् निम्नलिखितानि कथनानि सत्यानि असत्यानि वा ----

   (i) बहुलकः दत्तांशेषु सदैव एका संख्या भवति।

   (ii) माध्यः प्रदत्त-दत्तांशेषु एका संख्या भवितुम् अर्हति।

   (iii) माध्यकः दत्तांशेषु सदैव एका संख्या भवति।

   (iv) 6,4,3,8,9,12,13,9 दत्तांशानां माध्यः नव (9) अस्ति।

3.8 भिन्नोद्देश्येन सह दण्डालेखानां प्रयोगः

गतवर्षे वयं दृष्टवन्तः स्मः यत् कथम् एकत्रीकृताः (संगृहीताः) सूचनाः एकस्याम् आवृति-विभाजन-तालिकायाः रूपेण आदौ व्यवस्थीकृत्य पुनश्च एताः सूचनाः चित्रीयरूपेण चित्रालेखानां दण्डालेखानाम् (bar graphs) च रूपेण निरूप्यन्ते। भवन्तः एतान् दण्डालेखान् द्रष्टुं शक्नुवन्ति तथा च एतेषां विषये निष्कर्षम् अपि निष्कासयितुं शक्नुवन्ति । भवन्तः एतान् दण्डालेखान् आधारीकृत्य सूचनाः अपि प्राप्तुं शक्नुवन्ति। उदाहरणार्थं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् उन्नततमः दण्डः (bar) एव बहुलकः अस्ति, यदि दण्डावृत्तिं (निरन्तरतां) निरूपयति।

3.8.1 एकस्याः मापिकायाः (अथवा मापदण्डस्य) चयनम्

वयं जानीमः यत् दण्डालेखः समानविस्तृतियुक्तैः दण्डैः संख्यानां (अङ्कानाम्) निरूपणम् अस्ति तथा च दण्डानां दीर्घताः आवृत्ति-चितमापिकयोः आश्रयन्ति। उदाहरणार्थम् एकस्मिन् दण्डालेखे यत्र संख्याः घटकेषु प्रकटनीयाः सन्ति, आलेखः एकस्मै प्रेक्षणाय एकाङ्कदीर्घतां निरूपयति तथा च यदि तेन संख्याः दशकेन अथवा शतकेन दर्शनीयाः सन्ति, तदा एकाङ्कदीर्घता दश अथवा शतं प्रेक्षणानि निरूपयितुं शक्नोति। निम्नलिखितेषु उदाहरणेषु विचारं कुर्वन्तु -

उदाहरणम् 8 षष्ठ-सप्तम्योः कक्ष्ययोः द्विशतं (200) विद्यार्थिनः तेषां मनोऽभिलषितवर्णानां नामानि वक्तुम् उक्ताः येन हि अयं निर्णयः स्वीकर्तुं शक्येत यत् तेषां विद्यालयीय-भवनस्य कः वर्णः भवेत्। अस्य परिणामाः निम्नलिखितायां तालिकायां दर्शिताः सन्ति। एतानि तथ्यानि एकेन दण्डालेखेन निरूपयन्तु।

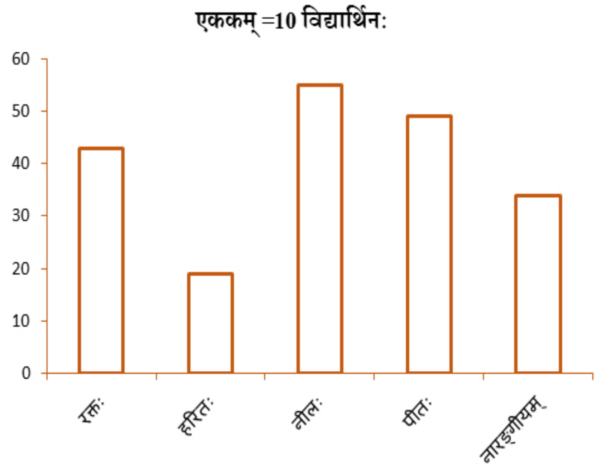
मनोभिलषितवर्णः	रक्तः	हरितः	नीलः	पीतः	नारङ्गः
विद्यार्थिनां संख्या	43	19	55	49	34

अस्य दण्डालेखस्य साहाय्येन निम्नलिखितानां प्रश्नानाम् उत्तराणि यच्छन्तु -

(i) कतमः वर्णः सर्वाधिकः प्रियः कतमश्च वर्णः सर्वाधिकः अप्रियः अस्ति ?

(ii) आहत्य कति वर्णाः सन्ति ? ते के सन्ति ?

समाधानम् एकाम् उपयुक्तां मापिकाम् अधोदर्शितानुसारेण चिन्वन्तु -



मापकस्य आरम्भं शून्यात् कुर्वन्तु। दत्तांशेषु महत्तमं मानं पञ्चपञ्चाशत् (55) अस्ति । अतः मापिकां पञ्चपञ्चाशत्तः (55 तः) किञ्चिद् अधिकं मत्वा षष्टिपर्यन्तं समापयामः । अक्षोपरि समानविभाजनानां प्रयोगं कुर्वन्तु, यथा दशानां वृद्धयः। भवन्तः जानन्ति यत् सर्वे दण्डाः शून्यषष्ट्योः (0 तथा च 60) मध्ये स्थिताः भविष्यन्ति। वयं मापिकायाः चयनम् एवं करिष्यामः येन शून्यषष्ट्योः (0 तथा 60) मध्यगत-दीर्घता नैव तु अधिक-लघ्वी भवेत् नैव च अधिक-बृहती भवेत्। अत्र वयं एककम् (एकाङ्कम्) = दश (10) विद्यार्थिनः इति स्वीकुर्मः। पुनः वयम् आकृत्यां दर्शितानुसारेण दण्डालेखम् अलिखाम नामाङ्कितं च कुर्मः।

दण्डालेखेन वयं निष्कर्षं निष्कास्यामः यत्

(i) नीलवर्णः सर्वाधिकः प्रियः वर्णः अस्ति (यतोहि नीलवर्णस्य प्रदर्शकः दण्डः उन्नततमः अस्ति)

(ii) हरितवर्णः सर्वाधिकः अप्रियः वर्णः अस्ति। (यतोहि हरितवर्णस्य प्रदर्शकः दण्डः लघुतमः अस्ति)

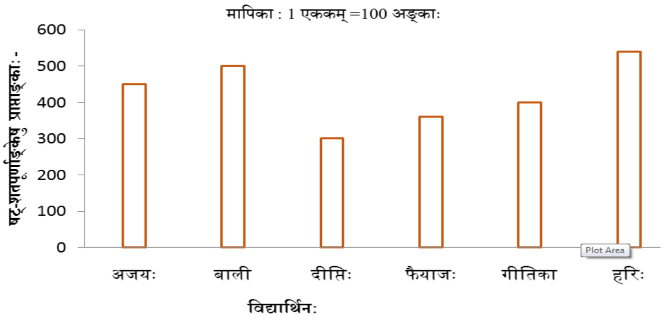
(iii) अत्र पञ्च वर्णाः सन्ति। रक्तः, हरितः, नीलः, पीतः नारङ्गः च (एते तिर्यक्-अक्षे द्रष्टुं शक्यन्ते)।

उदाहरणम् 9 अधोलिखित-दत्तांशाः कस्याश्चित् कक्षायाः षड्-विद्यार्थिभिः षट्-शतपूर्णाङ्केषु सम्पूर्णप्राप्ताङ्कान् दर्शयन्ति। एतान् दत्तांशान् एकेन दण्डालेखेन निरूपयन्तु।

विद्यार्थिनः	अजयः	बाली	दीप्तिः	फ़ैयाजः	गीतिका	हरिः
प्राप्ताङ्काः	450	500	300	360	400	540

समाधानम्

1. एकाम् उपयुक्तां मापिकाम् अवचेतु वयं शतस्य (100) वृद्धीः स्वीकुर्वन्तः समानविभाजनाक्षस्य उपरि अङ्कितं कुर्मः । अनेन प्रकारेण एककम् (1) शतम् अङ्कान् निरूपयिष्यति । (यदि वयम् एकेन एककेन दश अङ्कान् निरूपयामः तर्हि किं काठिन्यं भविष्यति ?
2. अधुना दत्तांशान् दण्डालेखेन निरूपयन्तु।



दण्डद्वयालेखस्य (निरूपणम्)

दत्तांशानाम् अधोलिखितयोः द्वयोः समूहयोः विषये विचारं कुर्वन्तु यौ आबेरदीनं तथा च मारगेटः इति द्वयोः नगरयोः मध्ये वर्षस्य सर्वेभ्यः द्वादशमासेभ्यः आतपस्य मध्यमानेन दैनिकहोराः दर्शयतः। एते नगरे दक्षिण-ध्रुवस्य निकटे स्थिते स्तः । अतः एव अत्र प्रतिदिनम् आतपः अत्यधिकं न्यून-होराः यावद् दृश्यते।

मापगेट्मध्ये												
	जन	फर.	मार्च्	अप्रैल्	मई	जूनः	जुलाई	अग.	सितं.	अक्तू.	नव.	दिस.
आतपस्य माध्याः होराः	2	$3\frac{1}{4}$	4	4	$7\frac{3}{4}$	8	$7\frac{1}{2}$	7	$6\frac{1}{4}$	6	4	2

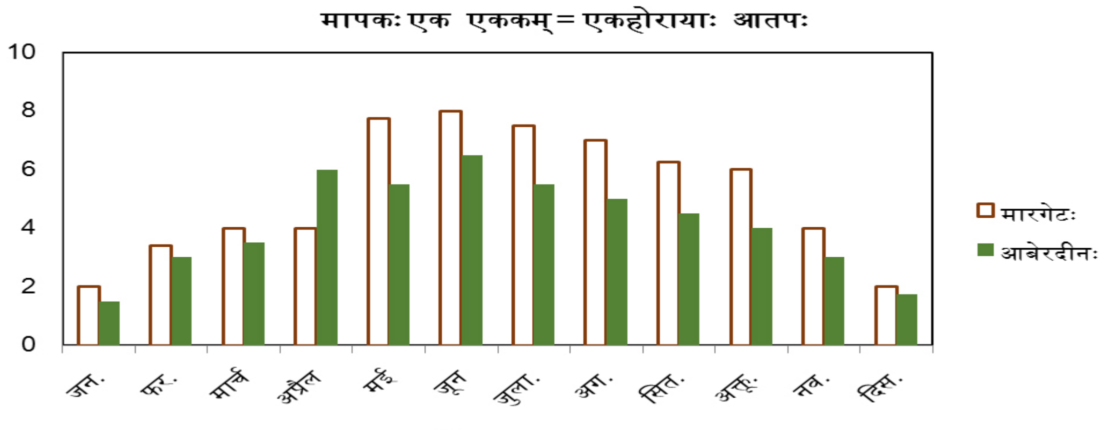
आबेरदीन्-मध्ये												
आतपस्य माध्याः होराः	$1\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	3	$1\frac{3}{4}$

अस्य पृथक्–पृथक् दण्डालेखम् आलिख्य भवन्तः निम्नलिखितप्रकारकाणां प्रश्नानाम् उत्तराणि दातुं शक्नुवन्ति

(i) प्रत्येकं नगरे कस्मिन् मासे अधिकतमः आतपः भवति ? अथवा

(ii) प्रत्येकं नगरे कस्मिन् मासे न्यूनतमः आतपः भवति ?

परन्तु 'एकस्मिन् विशिष्टे मासे कस्मिन् नगरे आतपः अधिकं कालं यावत् वर्तते ?' इत्येतादृशानां प्रश्नानाम् उत्तराणि दातुम् अस्माकं कृते उभयोः नगरयोः मध्यमान-आतपस्य होराणां तुलनायाः आवश्यकता भविष्यति। एतदर्थं वयं तान् आलेखान् आलेखितुम् अधिगमिष्यामः यान् 'द्विदण्डालेखः' (double bar graphs) इति कथयामः। एषु उभयोः नगरयोः सूचना दण्डालेखैः युगपद् एव दीयते।

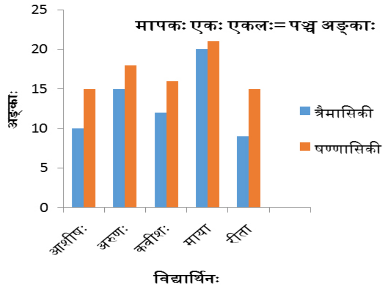


आकृतिः 3.1

उपरि प्रदत्तः दण्डालेखः (आकृति 3.1) उभयोः नगरयोः मध्यमान-आतपस्य समयं दर्शयति। अस्मिन् प्रत्येकं मासस्य कृते अस्माकं पार्श्वे द्वौ दण्डौ स्तः ययोः औन्नत्यानि प्रत्येकं नगरस्य मध्यमान-आतपस्य होराः दर्शयन्ति। अनेन वयम् एतं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः यत् अप्रैलमासं विहाय अन्येषु सर्वेषु मासेषु मारगेटे आबेरदीनस्य अपेक्षया सदैव आतपः अधिकः भवति। भवन्तः एतादृशं दण्डालेखं स्वनगरस्य क्षेत्रस्य वा कृते निर्मातुं शक्नुवन्ति।

आगच्छन्तु एकम् अन्यद् उदाहरणं स्वीकुर्मः, यत् अस्माभिः सह अधिकं सम्बन्धितम् अस्ति।

उदाहरणम् 10 गणितस्य अध्यापिका एतत् ज्ञातुम् इच्छति यत् त्रैमासिक्याः परीक्षायाः परं तया शिक्षणे अङ्गीकृतस्य नूतनप्रविधेः कश्चन प्रभावः सञ्जातः अथवा न । सा पञ्चभिः अतीव मन्दबुद्धिविद्यार्थिभिः त्रैमासिकपरीक्षायां पञ्चविंशतिपूर्णाङ्केषु अथ च षण्मासिकपरीक्षायां पञ्चविंशतिपूर्णाङ्केषु प्राप्तान् अङ्कान् स्वीकरोति ये -



विद्यार्थिनः	आशीषः	अरूणः	कवीशः	माया	रीता
त्रैमासिकी	10	15	12	20	9
षाण्मासिकी	15	18	16	21	15

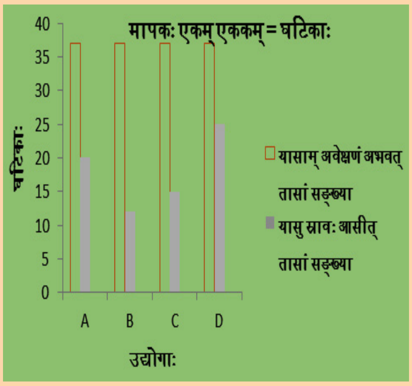
समाधानम् प्रथमं सा संलग्नायाम् आकृत्यां निर्दिष्टानुसारम् एकं द्विदण्डालेखम् आलिखति । दण्डान् दृष्ट्वा अनुमीयते यत् विद्यार्थिनां प्रदर्शने बहु संशोधनं जातम् अस्ति । अतः सा निर्णयति यत् तया स्वकीयः नूतनः प्रविधिः अग्रे अपि ग्राह्यः । किं भवन्तः कतिपयानाम् अन्य-स्थितीनां विषये विचारयन्ति यासु भवन्तः द्विदण्डालेखानां प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति ।

प्रयासं कुर

1. प्रदत्तः दण्डालेखः(आकृतिः3.2), विभिन्नैः निर्मितानां जलप्रतिरोधिघटीनां निरीक्षणाय कृतम् एकं सर्वेक्षणं दर्शयति । एतेषु प्रत्येकम् यन्त्रागारः एतद् घोषयति यत् तेषां घट्यः जलप्रतिरोधिन्यः सन्ति । एकस्य सर्वेक्षणस्य अन्तरम् उपर्युक्ताः परिणामाः समक्षम् आगताः ।

   (a) किं भवन्तः प्रत्येकम् उद्योगार्थं स्यन्दमान-घटीनां सङ्ख्यायाः परीक्षितानां सम्पूर्ण-घटीनां संख्यया भिन्नं निर्मातुं शक्नुन्ति ?

   (b) अनेन आधारेण किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् कस्य यन्त्रागारस्य घट्यः सर्वोत्तमाः सन्ति ?



2. 1995, 1996, 1997 तथा च 1998 तमवर्षेषु आङ्ग्लस्य हिन्द्याः च पुस्तकानां विक्रयणम् अधोदत्तम् अस्ति

	1995	1996	1997	1998
आङ्ग्लम्	350	400	450	620
हिन्दी	500	525	600	650

एकं द्विदण्डात्मकम् आलेखम् आलिखन्तु निम्नलिखितानां च प्रश्नानाम् उत्तराणि यच्छन्तु **आकृतिः 3.2**

(a) कस्मिन् वर्षे उभयोः भाषयोः पुस्तकानां विक्रयणस्य अन्तरं न्यूनतमम् आसीत् ?

(b) किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् आङ्ग्लपुस्तकानां याच्ञायां त्वरया वृद्धिः अभवत् ? अस्य औचित्यम् अपि बोधयन्तु ।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तराणि दातुं, 3.3 आकृतौ प्रदत्तस्य दण्डालेखस्य प्रयोगं कुर्वन्तु :

   (a) कतमः ग्राम्यपशुः सर्वाधिकः लोकप्रियः अस्ति ?

   (b) कति विद्यार्थिनां पालितपशुः कुक्करः (शुनकः) अस्ति ?

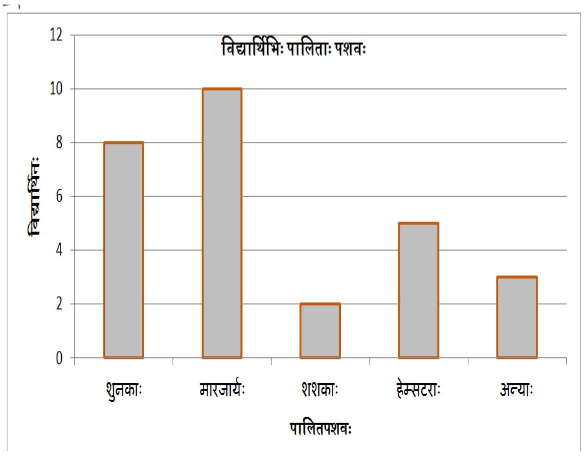
2. निम्नलिखितं दण्डालेखं पठन्तु यः केनचित् पुस्तकभण्डारेण पञ्चसु क्रमागतवर्षेषु विक्रीतानां पुस्तकानां संख्यां दर्शयति तथा च अग्रे आगमिष्यमाणानां प्रश्नानाम् उत्तराणि ददतु।

(i)1989,1990 तथा च 1992 तमवर्षेषु प्रत्येकस्मिन् वर्षे प्रायशः कति पुस्तकानि विक्रीतानि ?

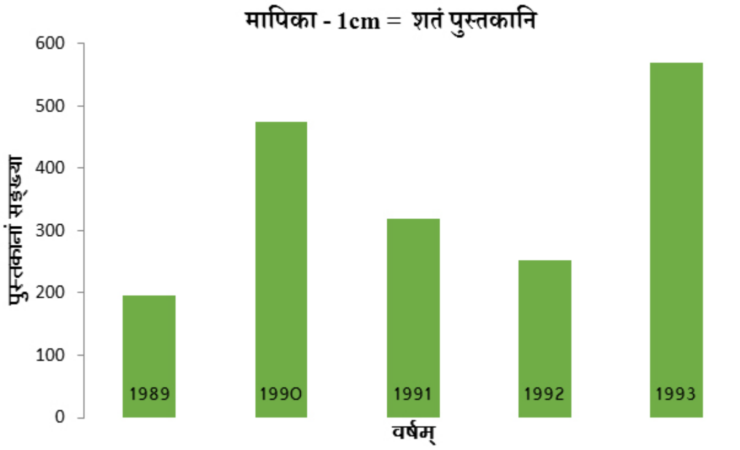
(ii) कस्मिन् वर्षे प्रायशः पञ्चसप्तत्युत्तरचतुःशतम् (475) पुस्तकानि विक्रीतानि ? कस्मिन् वर्षे प्रायेण पञ्चविंशत्युत्तरद्विशतम् (225) पुस्तकानि विक्रीतानि ?

(iii) केषु वर्षेषु पञ्चाशदधिकद्विशतात् (250) न्यूनानि पुस्तकानि विक्रीतानि ?

(iv) किं भवन्तः स्पष्टं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् भवन्तः एकोननवत्यधिकनवदशशततमे (1989)वर्षे विक्रीतानां पुस्तकानाम् आकलनं कथं करिष्यन्ति ?



आकृतिः 3.3



आकृतिः 3.4

3. षण्णां विभिन्न-कक्ष्याणां विद्यार्थिनां संख्याः अधः प्रदत्ताः सन्ति। एतान् दत्तांशान् एकेन दण्डालेखेन निरूपयन्तु -

कक्ष्याः	पञ्चमी	षष्ठी	सप्तमी	अष्टमी	नवमी	दशमी
विद्यार्थिनां संख्याः	135	120	95	100	90	80

(a) भवन्तः मापिकां केन प्रकारेण चेष्यन्ति ?

(b) निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तरं यच्छन्तु :

(i) कस्याः कक्ष्यायाः विद्यार्थिनां संख्या अधिकतमा अस्ति ? कस्यां कक्ष्यायां विद्यार्थिनां संख्या न्यूनतमा अस्ति ?

(ii) षष्ठ्याः कक्ष्यायाः विद्यार्थिनां संख्यायाः अष्टम्याः कक्ष्यायाः विद्यार्थिनां संख्याभिः अनुपातः ज्ञायताम्।

4. कस्यचिद् विद्यार्थिनः प्रथमसत्रस्य द्वितीयसत्रस्य च प्रदर्शनं दत्तम् अस्ति। एकाम् उपयुक्तां मापिकां चित्वा एकं द्विदण्डालेखम् आलिखन्तु अधः प्रदत्तप्रश्नानां च उत्तराणि यच्छन्तु :

विषयः	आङ्ग्लम्	हिन्दी	गणितम्	विज्ञानम्	सामाजिकविज्ञानम्
प्रथमसत्रम् (पूर्णाङ्काः शतम्)	67	72	88	81	73
द्वितीयसत्रम् (पूर्णाङ्काः शतम्)	70	65	95	85	75

(i) कस्मिन् विषये विद्यार्थिना स्वीये प्रदर्शने सर्वाधिका प्रगतिः कृता ?

(ii) कस्मिन् विषये न्यूनतमं संस्करणं वर्तते ?

(iii) किं कस्मिंश्चिद् विषये प्रदर्शनम् अधः पतितम् अस्ति ?

5. कस्मिंश्चिद् उपनिवेशे कृतसर्वेक्षणात् प्राप्तेषु निम्नलिखितेषु दत्तांशेषु विचारं कुर्वन्तु -

प्रियक्रीडा	क्रिकेट्क्रीडा	बॉस्केट्बॉल्-क्रीडा	तरणम्	यष्टिक्रीडा	कूर्दनम्
अवलोकनम्	1240	470	510	423	250
भागग्रहणम्	620	320	320	250	105

(i) एकाम् उपयुक्तां मापिकां चित्वा एकं द्विदण्डालेखम् आलिखन्तु । अस्माद् द्विदण्डालेखाद् भवन्तः कं निष्कर्षं प्राप्स्यन्ति ?

(ii) का क्रीडा अधिका लोकप्रिया वर्तते ?

(iii) क्रीडानाम् अवलोकनम् अधिकं रोचते उत वा तासु भागग्रहणम् ?

6. अस्य अध्यायस्य प्रारम्भे प्रदत्तानां विभिन्न-नगराणां न्यूनतमानाम् अधिकतमानां च तापमानानां दत्तांशान् (तालिका 3.1) स्वीकुर्वन्तु । एतेषां दत्तांशानाम् एकं द्विदण्डालेखम् आलिख्य निम्नलिखितप्रश्नानाम् उत्तराणि यच्छन्तु :

(i) प्रदत्तायां तिथौ कस्य नगरस्य न्यूनतमस्य अधिकतमस्य च तापमानस्य अन्तरं सर्वाधिकम् अस्ति ?

(ii) कतमत् नगरं सर्वाधिकम् उष्णम् अस्ति कतमत् च नगरं सर्वाधिकं शीतम् अस्ति ?

(iii) एतादृशयोः नगरयोः नामनी लिखन्तु ययोः एकस्य नगरस्य अधिकतमं तापमानम् अपरस्य नगरस्य न्यूनतमात् तापमानात् न्यूनम् आसीत् ।

(iv) तस्य नगरस्य नाम लिखन्तु यस्य न्यूनतमानाम् अधिकतमानां च तापमानानाम् अन्तरं न्यूनतमम् अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

कतिपयानां स्थितीनां विषये चिन्तयन्तु यासु न्यूनातिन्यूनाः तिस्रः एतादृश्यः भवेयुः यासां घटना निश्चिता स्यात् कतिपयाः एतादृश्यः भवेयुः यासां घटना अनिश्चिता स्यात् तथा च कतिपयाः एतादृश्यः भवेयुः यासां घटना सम्भवा एवं च असम्भवा अपि स्यात् अर्थाद् यासां घटनायाः काचित् सम्भावना स्याद् ।

3. 9 संयोगः प्रायिकता च

एतौ शब्दौ प्रायः अस्माकं जीवने दृष्टिपथम् आयातः । वयं प्रायः कथयामः यत् 'अद्य वृष्टेः सम्भावना (संयोगः) नास्ति'तथा एतदपि वदामः यत् 'अस्य बहुसम्भावना अस्ति यद् भारतं विश्वचषकं जेष्यति' । आगच्छन्तु एतौ शब्दौ किञ्चिद् विस्तरेण अधिगन्तुं प्रयासं कुर्मः । निम्नलिखितेषु कथनेषु विचारं कुर्वन्तु -

(i) सूर्यः पश्चिमदिशि उदेति ।

(ii) एकस्याः पिपीलिकायाः औन्नत्यं त्रिमीटरपरिमिं भवति ।

(iii) यदि भवन्तः एकम् महत्-घनफलं घनं स्वीकरिष्यन्ति तर्हि तस्य भुजा अपि दीर्घा भविष्यति ।

(iv) यदि भवन्तः दीर्घक्षेत्रफलस्य एकं वृत्तं स्वीकरिष्यन्ति तर्हि तस्य वृत्तस्य त्रिज्या अपि दीर्घा भविष्यति ।

(v) भारतम् आगामि-क्रिकेट्-शृङ्खलां जेष्यति ।

यदि भवन्तः उपर्युक्तानि कथनानि द्रक्ष्यन्ति तर्हि भवन्तः कथयिष्यन्ति यत् सूर्यस्य पश्चिमदिशि उदयः असम्भवः अस्ति, कस्याश्चित् पिपीलिकायाः औन्नत्यं त्रिमीटरपर्यन्तम् अपि सम्भवं नास्ति एतद्-विपरीतं यदि वृत्तस्य क्षेत्रफलम् अधिकम् अस्ति तर्हि तस्य एकस्य वृत्तस्य त्रिज्यायाः दीर्घता निश्चिता अस्ति । एताम् एव वार्तां भवन्तः घनस्य घनफलस्य तस्य च भुजस्य विषये अपि वक्तुं शक्नुवन्ति । पक्षान्तरे, भारतम् आगामिनिकष-क्रिकेट शृङ्खलां जेतुम् अपि अर्हति अथ च पराजितम् अपि भवितुम् अर्हति । जयपराजयौ उभौ सम्भवौ स्तः ।

3.9.1 संयोगः

यदि भवन्तः एकं नाणकम् उत्क्षिपन्ति तर्हि किं भवन्तः सदैव अस्य विषये यथार्थ-प्रागुक्तिं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् किं प्राप्तं भविष्यति ? प्रतिवारं नाणकम् उत्क्षिप्य तस्मात् प्राप्यमाणस्य परिणामस्य प्रागुक्तिं कुर्वन्तु । निजप्रेक्षणं निम्नलिखितसारणीरूपेण लिखन्तु -

उत्क्षेपण-संख्या	प्रागुक्तिः	परिणामः

एवं दशवारं कुर्वन्तु । प्राप्तान् परिणामान् पश्यन्तु । किं भवन्तः अस्मिन् कमपि क्रमं पश्यन्ति ? एकैकस्य उत्क्षेपणस्य अनन्तरं भवन्तः किम् प्राप्नुवन्ति ? किं भवद्भिः सदैव शिरः (शीर्षम्) (head) एव प्राप्यते ? एतेषां प्रेक्षणानाम् इतोऽपि दशभ्यः उत्क्षेपणेभ्यः आवृत्तिं प्रेक्षणानि च सारणीबद्धानि कुर्वन्तु ।

भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यद् एतानि प्रेक्षणानि किमपि स्पष्टं प्रतिरूपं नैव दर्शयन्ति । अधोदत्तायां सारण्यां, वयं सुशीला-सलमाभ्यां पञ्चविंशत्याः उत्क्षेपणेभ्यः प्राप्तानि प्रेक्षणानि अत्र यच्छन्तः स्मः । अत्र 'H' इति शिरः निरूपयति तथा च 'T' इति पादं (पट) निरूपयति ।

उत्क्षेपणसंख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
परिणामः	H	T	T	H	T	T	T	H	T	T	H	H	H	H	H
उत्क्षेपणसंख्या	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
परिणामः	T	T	H	T	T	T	T	T	T	T					

एते दत्तांशाः भवन्तं किं सूचयन्ति ? किं भवन्तः शिरसे पादाय च किमपि प्रागुक्तीयं प्रतिरूपं ज्ञातुं शक्नुवन्ति? स्पष्टम् अस्ति अत्र शिरसः पादस्य च आगमनस्य किमपि निश्चित-प्रतिरूपं नास्ति । यदा भवन्तः मुद्राम् उत्क्षिपन्ति तदा प्रत्येकम् उत्क्षेपणस्य परिणामः शिरस्पादयोः मध्ये कश्चन एकः भवितुम् अर्हति । अयं संयोगस्य विषयः अस्ति यद् एकस्मिन् विशेषोत्क्षेपणे भवतः एतयोः शिरस्पादयोः कोऽपि एकः प्राप्तः भवेत् ।

उपर्युक्तेषु दत्तांशेषु प्राप्तानां शिरस्परिणामानां पादपरिणामानां च संख्यायाः गणनां कुर्वन्तु । मुद्रां वारंवारम् उत्क्षिपन्तु एवं च भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति इति अभिलिखन्तु । एतत् ज्ञायतां यद् भवन्तः कतिवारं शिरः कतिवारं च पादं प्राप्तवन्तः ।

भवन्तः केनचित् पाशेन अवश्यमेव क्रीडितवन्तः स्युः । एकस्मिन् पाशे षट् मुखानि भवन्ति । यदा भवन्तः एकं पाशं क्षिपन्ति तर्हि किं भवन्तः प्राप्स्यमानायाः संख्यायाः प्रागुक्तिं कर्तुं शक्नुवन्ति ?

लूडो अथवा 'सर्पः एवं सोपानम्' इत्यस्य क्रीडायाः क्रीडनसमये भवद्भिः एषा कामना अवश्यमेव कृता स्याद् यद् एकस्मिन् विशिष्टक्षेपणे एका विशेषसंख्या परिणामरूपेण प्राप्ता भवेत् ।

किं पाशः सर्वदैव भवताम् इच्छानुसारं कार्यं करोति ? एकं पाशं स्वीकुर्वन्तु तं पञ्चाशदधिकैकशतवारं (150) क्षिपन्तु तथा च प्राप्तान् परिणामान् निम्नलिखित-तालिकायां पूरयन्तु -

पाशस्य लिखित संख्या	मेलनचिह्नम्	कतिवारं संख्या प्राप्ता ?
1		
2		

प्रत्येकवारं परिणामे प्राप्ते सति उपयुक्त-सङ्ख्यायाः पुरतः एकं मेलनचिह्नं योजयन्तु। उदाहरणार्थं प्रथमे क्षेपणे पञ्च इति आगते सति पञ्च इत्यस्य पुरतः एकं मेलनचिह्नं योजयन्तु। अग्रिमे चक्रे भवन्तः एकं (1) प्राप्नुवन्ति तदा 1 इत्यस्य पुरतः एकं मेलनचिह्नं योजयन्तु। एवमेव उपयुक्तसङ्ख्यानां कृते मेलनचिह्नानि योजयन्तु। एतां प्रक्रियां पञ्चाशदधिकैकशतवारं (150) कुर्वन्तु तथा च पञ्चाशदधिकैकशताय क्षेपणेभ्यः एकैकस्य परिणामस्य आहत्य संख्या ज्ञायताम्।

उपर्युक्तैः दत्तांशैः एकं दण्डालेखं रचयन्तु यस्मिन् एतद् दर्शितं स्याद् यत् एकः, द्वौ, त्रयः, चत्वारः, पञ्च षड् चेति परिणामाः 1,2,3,4,5 तथा च 6 कतिवारम् आगताः।

प्रयासं कुर्वन्तु

(एतत् सामूहिकरूपेण कुर्वन्तु)

1. एकां मुद्रां शतवारम्(100) उत्क्षिपन्तु ज्ञायतां च कतिवारं शिरः (चित)आगतं कतिवारं च पादः आगतः।
2. आफताबः एकं पाशं पञ्चाशदधिकद्विशतवारम् (250) अक्षिपत् अथ च निम्नलिखितां तालिकां प्राप्तवान्

पाशस्य उपरि संख्याः	मेलनचिह्नानि
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||
2	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
3	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||
4	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||
5	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||
6	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸

एतेषां दत्तांशानां कृते एकं दण्डालेखम् आलिखन्तु।

3. एकं पाशं शतवारं(100) क्षिपन्तु परिणामान् च अभिलिख्य ज्ञायताम् यत् एकः,द्वौ,त्रयः,चत्वारः,पञ्च षड् चेति (1,2,3,4,5,तथा च 6) कतिवारम् आगताः।

प्रायकिता किम् अस्ति ?

यदा वयं कामपि मुद्राम् उत्क्षिपामः तदा वयं जानीमः यद् अस्याः शिरः अथवा पादः इति द्वौ सम्भवौ परिणामौ स्तः। सममेव, एकस्मिन् पाशे क्षिप्ते सति अस्य षड् (6) सम्भवाः परिणामाः सन्ति। निजानुभवेन वयम् एतदपि जानीमः यद् एकस्यै मुद्रायै शिरसः अथवा पादस्य प्राप्तिः एका समप्रायिकी घटना (Probability) अस्ति। वयं वदामः यत् एकस्य शिरोभागस्य आगमनस्य प्रायिकता (1/2) इति अस्ति अथ च एकस्य पादभागस्य आगमनस्य प्रायिकता अपि (1/2) इति अस्ति। पाशे क्षिप्ते सति एकः, द्वौ, त्रयः, चत्वारः, पञ्च षड् (1,2,3,4,5, तथा च 6) इत्येतेषाम् आगमनस्य सम्भावनाः समानाः सन्ति। अर्थात् पाशस्य कृते षड् समप्रायिकाः (6) सम्भव-परिणामाः सन्ति। वयं वदामः यत् एकः, द्वौ, त्रयः, चत्वारः, पञ्च षड् च इत्येतेषु प्रत्येकम् आगमनस्य प्रायिकता (1/6) इति अस्ति।

अस्मिन् विषये वयं अग्रिमासु कक्ष्यासु अध्ययनं करिष्यामः। परन्तु एतावत्पर्यन्तं यद् अस्माभिः कृतं तेन स्पष्टम् अस्ति यत् बहु सम्भाव्यमानानां घटनानां प्रायिकता शून्यैकयोः (0 तथा 1) अन्तः भवति। यासां

प्रयासं कुर्वन्तु

एतादृशीः पञ्च स्थितीः निर्मान्तु अथवा विचारयन्तु यासां परिणामानां संयोगः समानः न भवेत्,अर्थात् ताः समप्रायिकाः न स्युः।

घटनस्य कश्चन संयोगः अथवा सम्भावना नास्ति तासां प्रायिकता शून्यम् (0) इति भवति। तथा च याः निश्चयेन घटितव्याः भवन्ति तासां प्रायिकता एकम् (1) इति भवति।

यदि अस्माकं पुरतः एका स्थितिः प्रदत्ता स्यात् तर्हि अस्माकं कृते विभिन्नान् सम्भवपरिणामान् अवगन्तुं प्रत्येकं च परिणामस्य सम्भावितसंयोगस्य अध्ययनस्य आवश्यकता भवति। एतत् सम्भवम् अस्ति यत् मुद्रायाः पाशस्य च स्थितेः विपरीतं एतादृशाः अपि परिणामाः स्युः येषां घटनस्य संयोगः समानः न भवेत् अर्थात् ते समप्रायिकाः न भवेयुः। उदाहरणार्थं यदि एकस्मिन् पात्रे पञ्चदश (15) रक्तकन्दुकानि स्युः अथ च नव(9) श्वेतकन्दुकानि भवेयुः अस्मात् च पात्राद् एकं कन्दुकम् अदृष्ट्वा निष्कास्यते तदा रक्तकन्दुकस्य प्राप्तेः संयोगः बहु अधिकम् अस्ति। किं भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति किमर्थम् ? रक्तकन्दुक-प्राप्तेः संयोगः श्वेतकन्दुक-प्राप्तेः संयोगात् कियत् गुणितम् अस्ति ? ध्यानं यच्छन्तु एतयोः द्वयोः प्रायिकताः शून्यैकयोः (0 तथा 1) अन्तः अस्ति।

प्रश्नावली 3.4

1. वदन्तु यत् निम्नलिखितेषु कस्य सम्भाव्यता निश्चिता अस्ति कस्य च सम्भाव्यता अनिश्चिता अस्ति अथ च कः भवितुम् अपि अर्हति परन्तु निश्चितरूपेण न -
   (i) अद्य भवन्तः गतदिनात् अधिकवयोमितः सन्ति।
   (ii) एकां मुद्राम् उत्क्षिपामः चेत् शिरोभागः आगमिष्यति।
   (iii) एकस्मिन् पाशे क्षिप्ते सति अष्टौ(8) आगमिष्यति।
   (iv) अग्रिमः यातायातदीपः हरितः भविष्यति।
   (v) श्वः मेघाः वेष्टिष्यन्ते।
2. एकस्मिन् पात्रे षड् (6) काचगुलिकाः सन्ति यासु एकतः षड् पर्यन्तं संख्याः अङ्किताः सन्ति।
   (i) द्विसंख्यकायाः काचगुलिकायाः अस्मात् निस्सारणस्य प्रायिकता का अस्ति ?
   (ii) पञ्चसंख्यकायाः काचगुलिकायाः अस्मात् निस्सारणस्य प्रायिकता का अस्ति ?
3. कतमः दलः क्रीडाम् आरप्स्यते इति एतं निर्णयं स्वीकर्तुम् एका मुद्रा उत्क्षेप्यते। अस्य का प्रायिकता वर्तते यत् भवतां दलम् एव क्रीडाम् आरप्स्यते ?

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. वयं दत्तांशानां संग्रहेण, अभिलेखनेन, प्रस्तुतीकरणेन च स्वीयान् अनुभवान् सङ्घटयितुं दत्तांशेभ्यः च निष्कर्ष-निस्कासने साहाय्यं प्राप्नुमः।
2. दत्तांशानाम् एकत्रीकरणात् पूर्वम् अस्माभिः एतद् ज्ञातव्यं यद् वयम् अस्य प्रयोगं कस्मिन् कार्ये करिष्यामः।
3. एकत्रितानां दत्तांशानाम् एकेन उपयुक्ततालिकारूपेण सङ्घटनस्य आवश्यकता भवति यतः एते सरलतया अवगन्तुं योग्याः स्युः एतेषां च व्याख्या कर्तुं शक्येत ।
4. मध्यमानम् एतादृशी संख्या अस्ति या प्रदत्त-प्रेक्षणानां समूहस्य(अथवा अङ्कानां) प्रतिनिधित्वं करोति तस्य च केन्द्रीयप्रवृत्तिं दर्शयति।

5. अङ्कगणितीयमाध्यं दत्तांशानाम् एकं प्रतिनिधिमानम् अस्ति।
6. बहुलकः केन्द्रीयप्रवृत्तेः अथवा प्रतिनिधिमानस्य एकम् अन्यरूपम् अस्ति। प्रेक्षणसमूहस्य बहुलकः तत् प्रेक्षणं अस्ति यत् सर्वाधिकवारम् आगच्छति।
7. माध्यकः अपि एकप्रकारकं प्रतिनिधिमानम् अस्ति। एतत् तद् मानं दर्शयति यत् प्रेक्षणस्य मध्ये भवति (तान् आरोहिक्रमे अथवा अवरोहिक्रमे व्यवस्थीकृत्य) तथा च अर्धं प्रेक्षणम् अस्मात् उपरि भवति अर्धं च प्रेक्षण्म अस्माद् अधः भवन्ति।
8. एकत्रिताः दत्तांशाः आवृति-विभाजन-तालिकायाः साहाय्येन चित्रीयरूपेण दण्डालेखानां रूपेण दर्शयितुं शक्यन्ते। दण्डालेखः संख्यानाम् अथवा दत्तांशानां समानविस्तृतदण्डैः एकं चित्रीयं निरूपणम् अस्ति।
9. अस्माभिः एतद् अपि अधिगतं यत् द्विदण्डात्मकः आलेखः कथम् आलिख्यते। एषः एकस्यां दृष्टौ प्रेक्षणानां द्वयोः समूहयोः मध्ये तुलनां कर्तुं सहायकः भवति।
10. अस्माकं दैनिके जीवने, एतादृश्यः स्थित्यः सन्ति याः निश्चितरूपेण भवन्ति, कतिपयाः एतादृश्यः सन्ति याः सम्भाव्याः न सन्ति तथा च कतिपयाः एतादृश्यः सन्ति याः भवितुम् अपि अर्हति नापि भवितुम् अर्हन्ति। एतादृशी स्थितिः सदैव घटनयोग्या भवति या घटितुम् अपि अर्हति अथवा नापि घटितुं अर्हति।